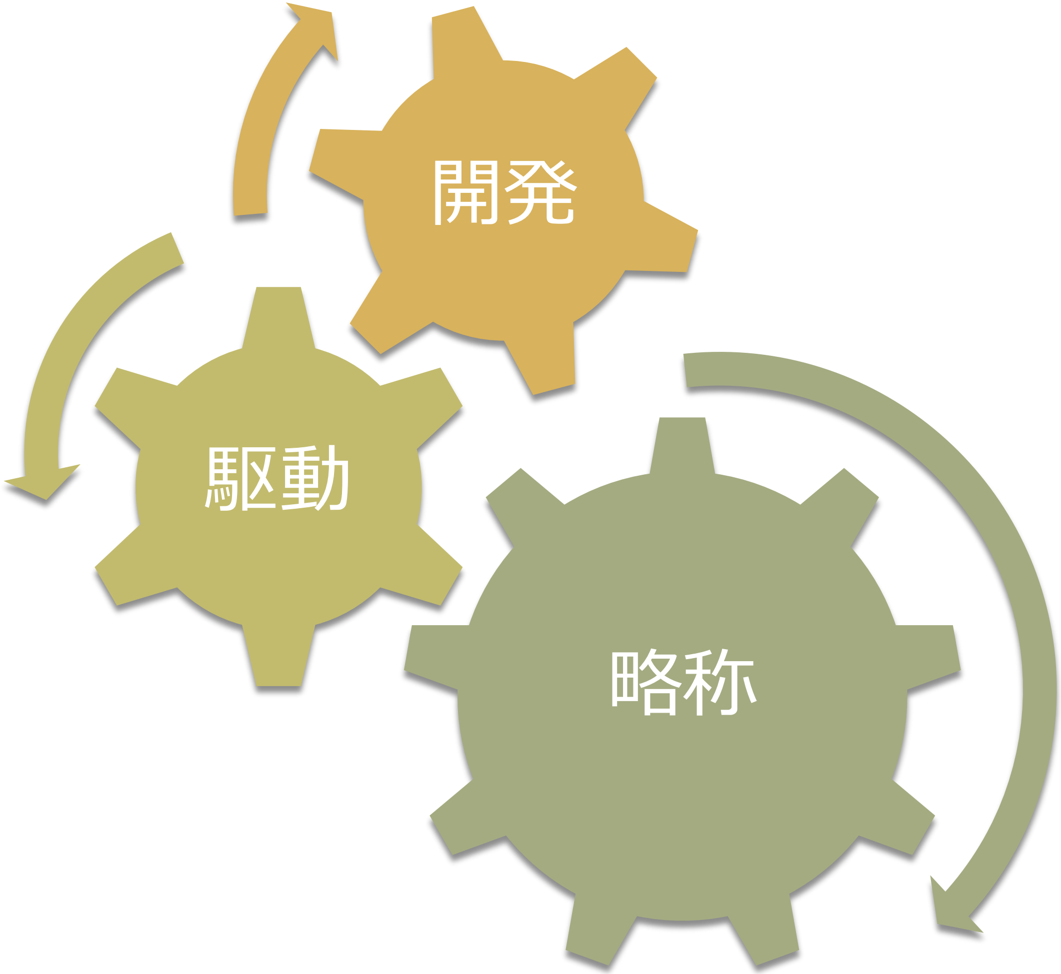
NFALSE:
多項式環に基づくより高速な公開鍵暗号

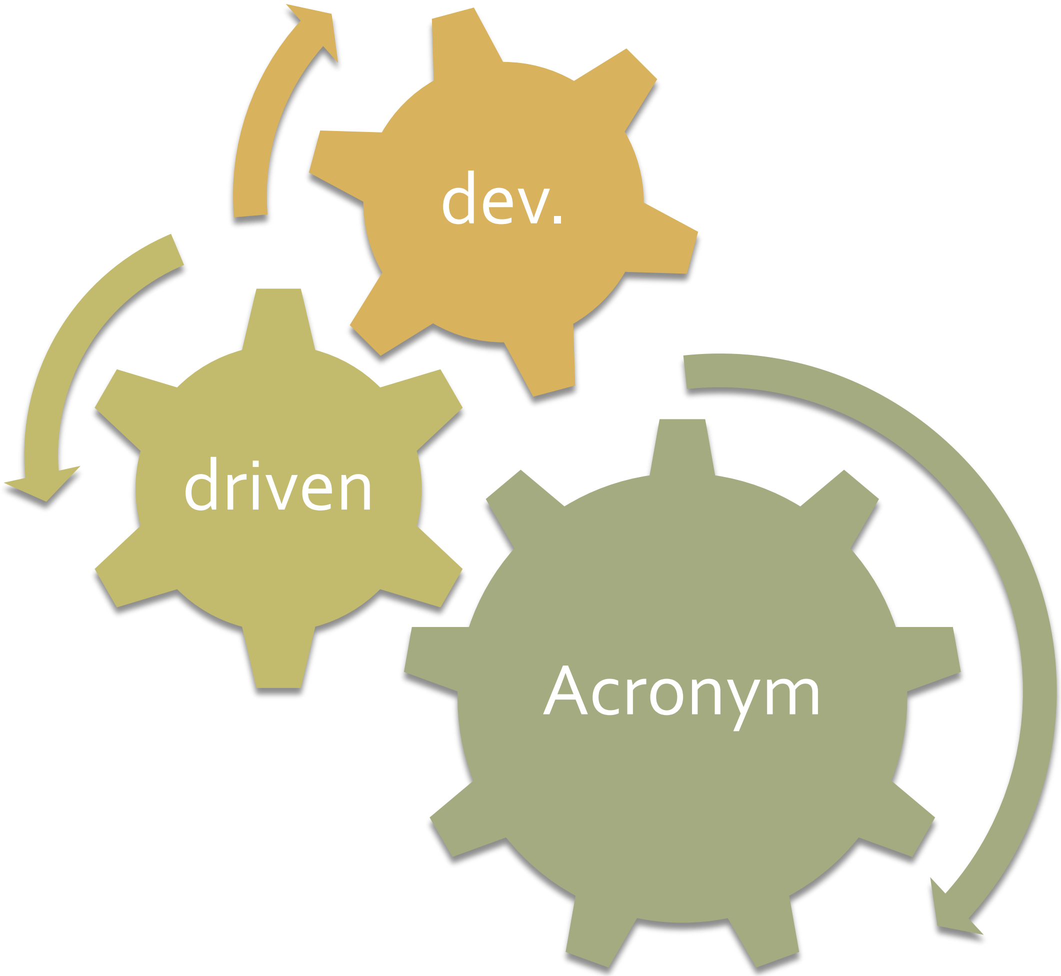
2009/01/22
[SCIS 2009 3F2-5]

草川恵太/田中圭介（東京工業大学）

略称駆動開発



ADD (Acronym Driven Development)



既存の方式

NTRU

既存の読み方

NTRUE

新提案

NFALSE

名前だけ決まった

NTRU

- Hoffstein, Pipher, Silverman (ANTS 1998)
  - 速い $\tilde{O}(n^2)$
  - 多項式環ベース
- NTRUの変種
  - CTRU (Gaborit, Ohler, Solé [GOS02])
  - MaTRU (Coglianese,Goi [CG05])
  - etc.

NTRU #1

- 記法
  - *: $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^n-1)$上の積
  - $\mathcal{B}(d)$ = {1がd個, 0がn-d個の多項式}

- パラメータ例:
  - 128bit: n=449, d=134
  - 256bit: n=853, d=268

NTRU #2

- 鍵生成
  - $\mathbf{f} \leftarrow \mathcal{B}(d)$, $\mathbf{g} \leftarrow \mathcal{B}(d)$
  - pk: $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1} * \mathbf{g} \bmod q$
  - sk: $\mathbf{f}$

NTRU #2

- 暗号化
  - $\mathbf{m} \in \mathcal{B}(d)$, $\mathbf{r} \leftarrow \mathcal{B}(d)$
  - $\mathbf{c} = p * \mathbf{h} * \mathbf{r} + \mathbf{m} \bmod q$
- 復号
  - $\mathbf{a}' \leftarrow \mathbf{f} * \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} \leftarrow p * \mathbf{g} * \mathbf{r} + \mathbf{f} * \mathbf{m}$ over $\mathbb{Z}$
  - $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{F}_p * \mathbf{a} \bmod p$, where $\mathbf{F}_p * \mathbf{f} = 1 \bmod p$
- 計算速度
  - $O(n^2 \log^2 q)$

発想

NTRU	$\mathbb{Z}_q [\alpha]/(\alpha^n-1)$
CTRU	$(GF(2)[T])[\alpha]/(\alpha^n-1)$
MaTRU	$M_{k,k}(\mathbb{Z}_q [\alpha]/(\alpha^n-1))$
NFALSE	???

発想

NTRU	$\mathbb{Z}_q[\alpha]/(\alpha^n-1)$
CTRU	[illegible]
MaTRU	[illegible]
NFALSE	$\mathbb{Z}_q[\alpha]/(\alpha^n\mathbf{+1})$

TRUE or FALSEを
-1 or +1と解釈

α^n+1の性質 #1

- $n=2^k$のとき
- $\mathbb{Z}$上既約
- $\mathbb{Z}_q$上可約
  - q:素数かつ$2n|q-1 \Rightarrow \mathbb{Z}_q$上可約
  - w:位数2nの$\mathbb{Z}_q$の要素
  - $\alpha^n+1 = (\alpha-w^1)(\alpha-w^3)\ldots(\alpha-w^{2n-1})$ over $\mathbb{Z}_q$

α^n+1の性質 #2

- FFTと同様に**f*g**を$O(n \log n \log^2 q)$で計算できる
  →ほぼ線形時間で暗号化・復号が可能!
- NTRUだと$O(n^2 \log^2 q)$

長所が見つかった

高速化のポイント

- 数学的構造
  - w: 位数2nの$\mathbb{Z}_q$の要素
  - $\alpha^n+1 = (\alpha-w^1)(\alpha-w^3)\ldots(\alpha-w^{2n-1})$
  - $\mathbb{Z}_q[\alpha]/(\alpha^n+1) = \mathbb{Z}_q[\alpha]/(\alpha-w^1)\times\ldots\times\mathbb{Z}_q[\alpha]/(\alpha-w^{2n-1})$
  - $\theta_{n,w}(\mathbf{f}) = (\mathbf{f}(w^1), \ldots, \mathbf{f}(w^{2n-1}))$
- 行列で書いてみる

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \begin{pmatrix} w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^4 & w^9 & w^{14} & w^3 \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^5 & w^{12} & w^3 & w^{10} & w^1 \\ w^0 & w^9 & w^2 & w^{11} & w^4 & w^{13} & w^6 & w^{15} \\ w^0 & w^{11} & w^6 & w^1 & w^{12} & w^7 & w^2 & w^{13} \\ w^0 & w^{13} & w^{10} & w^7 & w^4 & w^1 & w^{14} & w^{11} \\ w^0 & w^{15} & w^{14} & w^{13} & w^{12} & w^{11} & w^{10} & w^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \begin{pmatrix} w^0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^2 & w^5 \\ w^0 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^4 & w^9 & w^{14} & w^3 \\ w^0 & w^7 & w^{14} & w^5 & w^{12} & w^3 & w^{10} & w^1 \\ w^0 & w^9 & w^2 & w^{11} & w^4 & w^{13} & w^6 & w^{15} \\ w^0 & w^{11} & w^6 & w^1 & w^{12} & w^7 & w^2 & w^{13} \\ w^0 & w^{13} & w^{10} & w^7 & w^4 & w^1 & w^{14} & w^{11} \\ w^0 & w^{15} & w^{14} & w^{13} & w^{12} & w^{11} & w^{10} & w^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \begin{pmatrix} w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^1 & w^3 & w^5 & w^7 \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^3 & w^9 & w^{15} & w^5 \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^5 & w^{15} & w^9 & w^3 \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^7 & w^5 & w^3 & w^1 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^9 & w^{11} & w^{13} & w^{15} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^{11} & w^1 & w^7 & w^{13} \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^{13} & w^7 & w^1 & w^{11} \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^{15} & w^{13} & w^{11} & w^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^1 & w^3 & w^5 & w^7 \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^3 & w^9 & w^{15} & w^5 \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^5 & w^{15} & w^9 & w^3 \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^7 & w^5 & w^3 & w^1 \\ \hline w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^9 & w^{11} & w^{13} & w^{15} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^{11} & w^1 & w^7 & w^{13} \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^{13} & w^7 & w^1 & w^{11} \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^{15} & w^{13} & w^{11} & w^9 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^1 & w^3 & w^5 & w^7 \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^3 & w^9 & w^{15} & w^5 \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^5 & w^{15} & w^9 & w^3 \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^7 & w^5 & w^3 & w^1 \\ \hline w^0 & w^2 & w^4 & w^6 & w^9 & w^{11} & w^{13} & w^{15} \\ w^0 & w^6 & w^{12} & w^2 & w^{11} & w^1 & w^7 & w^{13} \\ w^0 & w^{10} & w^4 & w^{14} & w^{13} & w^7 & w^1 & w^{11} \\ w^0 & w^{14} & w^{12} & w^{10} & w^{15} & w^{13} & w^{11} & w^9 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = w^2$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \begin{pmatrix} \bar{w}^0 & \bar{w}^1 & \bar{w}^2 & \bar{w}^3 & w^1 \cdot \bar{w}^0 & w^1 \cdot \bar{w}^1 & w^1 \cdot \bar{w}^2 & w^1 \cdot \bar{w}^3 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^3 & \bar{w}^6 & \bar{w}^1 & w^3 \cdot \bar{w}^0 & w^3 \cdot \bar{w}^3 & w^3 \cdot \bar{w}^6 & w^3 \cdot \bar{w}^1 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^5 & \bar{w}^2 & \bar{w}^7 & w^5 \cdot \bar{w}^0 & w^5 \cdot \bar{w}^5 & w^5 \cdot \bar{w}^2 & w^5 \cdot \bar{w}^7 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^7 & \bar{w}^6 & \bar{w}^5 & w^7 \cdot \bar{w}^0 & w^7 \cdot \bar{w}^7 & w^7 \cdot \bar{w}^6 & w^7 \cdot \bar{w}^5 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^1 & \bar{w}^2 & \bar{w}^3 & -w^1 \cdot \bar{w}^0 & -w^1 \cdot \bar{w}^1 & -w^1 \cdot \bar{w}^2 & -w^1 \cdot \bar{w}^3 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^3 & \bar{w}^6 & \bar{w}^1 & -w^3 \cdot \bar{w}^0 & -w^3 \cdot \bar{w}^3 & -w^3 \cdot \bar{w}^6 & -w^3 \cdot \bar{w}^1 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^5 & \bar{w}^2 & \bar{w}^7 & -w^5 \cdot \bar{w}^0 & -w^5 \cdot \bar{w}^5 & -w^5 \cdot \bar{w}^2 & -w^5 \cdot \bar{w}^7 \\ \bar{w}^0 & \bar{w}^7 & \bar{w}^6 & \bar{w}^5 & -w^7 \cdot \bar{w}^0 & -w^7 \cdot \bar{w}^7 & -w^7 \cdot \bar{w}^6 & -w^7 \cdot \bar{w}^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = w^2$$

行列表示

$$\theta_{n,w}(f) = \begin{pmatrix} \theta_{n/2,w^2}(f_e) + (w^1, \ldots, w^7)\theta_{n/2,w^2}(f_o) \\ \theta_{n/2,w^2}(f_e) - (w^1, \ldots, w^7)\theta_{n/2,w^2}(f_o) \end{pmatrix}$$

ほとんどFFTと同じ
再帰的な計算で、Õ(n log q)

NTRUとFFT

なぜNTRUではFFTを使わないのか?

[Sil99] NTRU-FFTを考察

[Gen01] 低次元格子を用いて攻撃

NTRU格子 - 準備

$$\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^4-1) \longleftrightarrow C_4(\mathbb{Z})$$

$$\mathbf{x}(\alpha) = 1+\alpha+\alpha^3 \longleftrightarrow \mathrm{Rot}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}(\alpha) = \alpha+2\alpha^2 \longleftrightarrow \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}*\mathbf{y} = 3+2\alpha+\alpha^2+\alpha^3 \longleftrightarrow \mathrm{Rot}(\mathbf{x})\,\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

NTRU格子 [CS97]

- Coppersmith and Shamir
  - $R_h = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{h} * \mathbf{x} = \mathbf{y} \bmod q\}$
  - $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in R_h$
  - $\|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\| \leqq \sqrt{2d}$

$$\mathbf{B}_h = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(1) & \mathrm{Rot}(0) \\ \mathrm{Rot}(\mathbf{h}) & \mathrm{Rot}(q) \end{pmatrix} \qquad L_h = L(\mathbf{B}_h)$$

Gentryの攻撃—アイデア

- $b|n$のとき,
- $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^n-1)$から$\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^b-1)$に環準同型
- $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^n-1)$について

  $\theta_b(\mathbf{a}) = (\sum_{i=0 \bmod b} a_i, \ldots, \sum_{i=b-1 \bmod b} a_i) \in \mathbb{Z}[\alpha]/\langle\alpha^b-1\rangle$

- ポイント
  - θ_bはノルムを高々n/b倍にしかしない
  - $\|(\theta_b(\mathbf{f}), \theta_b(\mathbf{g}))\| \leqq (n/b)\sqrt{2d}$
  - $(\theta_b(\mathbf{f}), \theta_b(\mathbf{g}))$から$(\mathbf{f}, \mathbf{g})$に戻せる (省略)

Gentryの攻撃を防ぐ

- α^n+1は$\mathbb{Z}$上既約
  - これで防げた
- $\mathbb{Z}_q$上可約
  - 現時点では攻撃できるようないい環がない?
  - 今のところNFALSEでは大丈夫

略称の意味

NFALSE

略称の意味

New

Fast and

Almost

Linear-time

Secure (?)

Encryption

最後に

NFALSEは
皆さんの攻撃を
お待ちしています